Wyrażenia algebraiczne

Do obliczania wyrażeń algebraicznych niezbędne są definicje potęgi, pierwiastków i ich własności. W niektórych przykładach usuwania niewymierności z mianownika ułamka potrzebna jest również znajomość wzorów skróconego mnożenia, w szczególności wzoru na różnicę kwadratów.

Podstawowe definicje i własności

Definicja potęgi

$$\begin{cases} a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a (n - razy) \\ a^0 = 1, a \neq 0 \end{cases}$$

Własności potęgi:

$$\begin{cases} \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ a^n a^m = a^{n+m} \\ \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \\ a^n b^n = (ab)^n \\ \dfrac{a^n}{b^n} \cdot \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+m} \\ a^n b^n a^m b^m = (ab)^{n+m} \end{cases}$$

Definicja 2. (pierwiastka kwadratowego)

Dla nieujemnej liczby podpierwiastkowej a zachodzi równoważność:

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$

Definicja 3. (pierwiastka stopnia trzeciego)

Dla dowolnej liczby podpierwiastkowej a zachodzi równoważność:

$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$

Definicja 4. (pierwiastka stopnia n, gdzie $n \in N.$)

Dla liczby podpierwiastkowej a zachodzi równoważność:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$

Uwaga: w definicji 4 jeśli n jest liczbą parzystą liczba podpierwiastkowa a musi być nieujemna, w przeciwnym przypadku jest dowolną liczbą.

Własności pierwiastków

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \\ \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{m+4}} \\ \dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[n]{a^{m-k}} \end{cases}$$

Notacja pierwiastków:

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

i ogólnie:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Wyrażenia algebraiczne - przykłady

1. Przykłady obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych i algebraicznych.

A. $\frac{3^5 \cdot 3^4}{3^8} = \frac{3^{5+4}}{3^8} = \frac{3^9}{3^8} = 3^{9-8} = 3^1 = 3.$

B. $\frac{12^5}{4^4 \cdot 3^6} = \frac{(3 \cdot 4)^5}{3^6 \cdot 4^4} = \frac{3^5 \cdot 4^5}{3^6 \cdot 4^4} = 3^{5=6} \cdot 4^{5-4} = 3^{-1} \cdot 4^1 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$

C. $\frac{(a^2b^3)^4}{(a^4b^2)^3} = \frac{(a^2)^4(b^3)^4}{(a^4)^3(b^2)^3} = \frac{a^{2\cdot4}b^{3\cdot4}}{a^{4\cdot3}b^{2\cdot3}} = \frac{a^8}{a^{12}} \cdot \frac{b^{12}}{b^6} = a^{8-12} \cdot b^{12-6} = a^{-4}b^6 = \frac{1}{a^4} \cdot b^6 = \frac{b^6}{a^4}.$

D. $\frac{x^{-2}y^4z^{-3}}{x^3y^{-5}z^3} = \frac{x^{-2}}{x^3} \cdot \frac{y^4}{y^{-5}} \cdot \frac{z^{-3}}{z^3} = x^{-2-3} \cdot y^{4-(-5)} \cdot z^{-3-3} = x^{-5} \cdot y^9 \cdot z^{-6} = \frac{1}{x^5} \cdot y^9 \cdot \frac{1}{z^6} = \frac{y^9}{x^5z^6}.$

2. Przykłady zapisywania wyrażeń arytmetycznych w postaci potęgi liczby 2

A. $4 \cdot \sqrt[5]{8} = 2^2 \cdot 8^{\frac{1}{5}} = 2^2 \cdot (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{3}{5}} = 2^{2+\frac{3}{5}} = 2^{\frac{13}{5}} = 2^{2\frac{3}{5}}.$

B. $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{1+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{2}{3}}.$

C. $\frac{\sqrt[4]{2}}{16} = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^4} = 2^{\frac{1}{4}-4} = 2^{-\frac{15}{4}} = 2^{-3\frac{3}{4}}.$

D. $\sqrt[3]{\frac{32}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{2^5}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{5-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}}=2^{\frac{9}{6}}=2^{\frac{3}{2}}=2^{1\frac{1}{2}}.$

3. Przykłady wyłączanie czynnika spod znaku pierwiastka

A. $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}.$

B. $\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$

C. $\sqrt[4]{162}=\sqrt[4]{81\cdot 2}=3\sqrt[4]{2}.$

D. $\sqrt{3x^4}=x^2\sqrt{3}.$

E. $\sqrt[3]{16a^9}=\sqrt[3]{8\cdot 2\left(a^3\right)^3}=2a^3\sqrt[3]{2}.$

F. $\sqrt[4]{4a^4b^8}=\sqrt[4]{(a)^4\left(b^2\right)^4\cdot 4}=ab^2\sqrt[4]{4}.$

4. Przykłady pozbywania się pierwiastków

A. $\sqrt{7\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$

B. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$

C. $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}=\frac{3}{2}.$

5. Przykłady likwidowania niewymierności w mianowniku:

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

B. $\frac{6}{\sqrt[4]{2}}=\frac{6}{\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{6\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{6\sqrt[4]{8}}{2}=3\sqrt[4]{8}.$

C. $\frac{11}{5-\sqrt{3}}=\frac{11}{5-\sqrt{3}}\cdot\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{11\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\cdot\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{55+11\sqrt{3}}{25-3}=\frac{55+11\sqrt{3}}{2\cdot 11}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}.$

D. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{3-2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}.$

6. Przykłady porównywania liczb

A. Wskazać większą z podanych liczb $2^{13}, 4^7$.

$4^7=\left(2^2\right)^7=2^{2\cdot 7}=2^{14}>2^{13}$, więc liczba 4^7 jest większa.

B. Wskazać mniejszą z podanych liczb $9^{20}, 27^{13}$.

Zauważmy, że $9^{20}=\left(3^2\right)^{20}=3^{2\cdot 20}=3^{40}$, z drugiej strony $27^{13}=\left(3^3\right)^{13}=3^{3\cdot 13}=3^{39}$. Ponieważ $3^{39}<3^{40}$, więc mniejszą z liczb jest 27^{13}.